Limites – Corrections des Exercices

Exercice n° 1
Premiers calculs de limites.

a. *Limites en $+\infty$ (quand x devient arbitrairement grand).*

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2020 - x$ *(d)* $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 + 2x^3$ *(g)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2+1}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2020-x}$ *(e)* $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 + \dfrac{1}{x}$ *(h)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{5}{x} - 2$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2020 - \dfrac{1}{x}$ *(f)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3x^2+1}$ *(i)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{3x-5}}$

Correction :

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2020 - x = -\infty$, car x devient arbitrairement grand, avec un coefficient negatif.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2020-x} = 0$, car on divise 1 par $2020 - x$, une quantité arbitrairement grande (négative).

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2020 - \dfrac{1}{x} = 2020$, car $\dfrac{1}{x}$ devient arbitrairement petit.

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 + 2x^3 = +\infty$, car on ajoute deux quantités, $3x^2$ et $2x^3$, qui deviennent arbitrairement grandes.

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 + \dfrac{1}{x} = +\infty$, car on ajoute, $3x^2$, une quantité qui deviennent arbitrairement grandes et $\dfrac{1}{x}$, qui devient arbitrairement petit.

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3x^2+1} = 0$, car on divise 1 par $3x^2 + 1$, une quantité arbitrairement grande.

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{3x^2+1} = +\infty$, car on met dans la racine carrée une quantité arbitrairement grande, donc cette racine devient elle aussi arbitrairement grande.

(h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{5}{x} - 2 = -2$ car les deux quantités $\dfrac{3}{x^2}$ et $\dfrac{5}{x}$ deviennent arbitrairement petites, donc tendent vers 0, et seul reste -2.

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{3x-5}} = 0$, car la quantité $3x - 5$ devient arbitrairement grande, donc $\sqrt{3x-5}$ aussi, et donc son inverse devient arbitrairement petit.

—

b. *Limites en $-\infty$ (quand x devient arbitrairement grand dans les négatifs).*

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2$ *(d)* $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 - 2x^3$ *(g)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2+1}$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2020 - x$ *(e)* $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 + \dfrac{1}{x}$ *(h)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{5}{x} - 2$

(c) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2020 - \dfrac{1}{x}$ *(f)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{3x^2+1}$ *(i)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{\sqrt{5-3x}}$

Correction :

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 = +\infty$, car x^2, et donc $3x^2$, est positif et devient arbitrairement grand.

(b) $\lim_{x\to-\infty} 2020 - x = +\infty$, car x devient arbitrairement grand dans les négatif, et est multipliíe par un coefficient negatif.

(c) $\lim_{x\to-\infty} 2020 - \frac{1}{x} = 2020$, car $\frac{1}{x}$ devient arbitrairement petit.

(d) $\lim_{x\to-\infty} 3x^2 - 2x^3 = +\infty$, car on ajoute deux quantités, $3x^2$ et $-2x^3$, qui deviennent arbitrairement grandes.

(e) $\lim_{x\to-\infty} 3x^2 + \frac{1}{x} = +\infty$, car on ajoute, $3x^2$, une quantité qui deviennent arbitrairement grandes et $\frac{1}{x}$, qui devient arbitrairement petit.

(f) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3x^2+1} = 0$, car on divise 1 par $3x^2+1$, une quantité arbitrairement grande (positive).

(g) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{3x^2+1} = +\infty$, car on met dans la racine carrée $3x^2+1$, une quantité arbitrairement grande, donc cette racine devient elle aussi arbitrairement grande.

(h) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x} - 2 = -2$, car les deux quantités $\frac{3}{x^2}$ et $\frac{5}{x}$ deviennent arbitrairement petites, donc tendent vers 0, et seul reste -2.

(i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\sqrt{5-3x}} = 0$, car la quantité $5-3x$ devient arbitrairement grande, donc $\sqrt{5-3x}$ aussi, et donc son inverse devient arbitrairement petit.

—

c. *Limites en un point (quand x tend vers une valeur finie).*

(a) $\lim_{x\to2021} \frac{1}{2020-x}$ *(c)* $\lim_{x\to1} \sqrt{3x^2+1}$ *(e)* $\lim_{x\to0} 2 - \frac{1}{x^2}$

(b) $\lim_{x\to1} 3x^2 + \frac{1}{x}$ *(d)* $\lim_{x\to2} \frac{2}{\sqrt{3x-5}}$ *(f)* $\lim_{x\to2} 3x^2 + 2x^3$

Correction :

(a) $\lim_{x\to2} 3x^2 + 2x^3 = 28$, car $3.2^2 + 2.2^3 = 3.4 + 2.8 = 28$.

(b) $\lim_{x\to1} 3x^2 + \frac{1}{x} = 4$, car $3.1^2 + 1/1 = 4$.

(c) $\lim_{x\to1} \sqrt{3x^2+1} = 2$, car $3x^2+1$ tend vers $3.1^2+1 = 4$ et $\sqrt{4} = 2$.

(d) $\lim_{x\to2} \frac{2}{\sqrt{3x-5}} = 2$, car $3x-5$ tend vers $3.2-5 = 1$ et $\frac{2}{\sqrt{1}} = 2/1 = 1$.

(e) $\lim_{x\to2021} \frac{1}{2020-x} = -1$, car $2020 - X$ tend vers $2020 - 2021 = -1$.

(f) $\lim_{x\to0} 2 - \frac{1}{x^2} = +\infty$, car on divise 1 par x^2, une quantité arbitrairement grande positive.

—

d. *Limites à gauche et à droite d'un point.*

(a) $\lim_{x\to2^+} \frac{1}{2x-4}$ *(c)* $\lim_{x\to2^+} \frac{1}{(2x-4)^4}$ *(e)* $\lim_{x\to0^+} 3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

(b) $\lim_{x\to2^-} \frac{1}{2x-4}$ *(d)* $\lim_{x\to2^-} \frac{1}{(2x-4)^4}$ *(f)* $\lim_{x\to1^-} 3x^2 + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

Correction :

(a) $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{2x-4} = +\infty$, car $2x-4$ tend vers 0 en étant *positif*, donc $\frac{1}{2x-4}$ devient arbitrairement grand dans les positifs.

(b) $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2x-4} = -\infty$, car $2x-4$ tend vers 0 en étant *négatif*, donc $\frac{1}{2x-4}$ devient arbitrairement grand dans les négatifs.

(c) $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(2x-4)^4} = +\infty$, car $(2x-4)^2$ tend vers 0 en étant *positif*, donc $\frac{1}{(2x-4)^2}$ devient arbitrairement grand dans les positifs.

(d) $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(2x-4)^4} = +\infty$, car $(2x-4)^2$ tend vers 0 en étant *positif*, donc $\frac{1}{(2x-4)^2}$ devient arbitrairement grand dans les positifs.

(e) $\lim_{x\to 0^+} 3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, car $3x^2$ tend vers 0, tandis que $\sqrt{x}$ tend vers 0 en étant *positif*, donc $\frac{1}{\sqrt{x}}$ devient arbitrairement grand dans les positifs.

(f) $\lim_{x\to 1^-} 3x^2 + \frac{1}{\sqrt{1-x}} = +\infty$, car $3x^2$ tend vers 3, tandis que $\sqrt{1-x}$ tend vers 0 en étant *positif*, donc $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ devient arbitrairement grand dans les positifs.

—

Exercice n° 2

Déterminer les limites suivantes aux valeurs demandées.

(1). *a.* $\lim_{x\to\alpha} -2x^3$, *pour* $\alpha = 2, +\infty$ *et* $-\infty$.

b. $\lim_{x\to\alpha} 3\sqrt{x}$, *pour* $\alpha = +\infty$ *et* 4.

Correction :

a. $\lim_{x\to\alpha} -2x^3$, pour $\alpha = 2, +\infty$ et $-\infty$.

Limite quand x tend vers 2 :
$\lim_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$, donc $\lim_{x\to 2} -2x^3 = -2.8 = -16$.

Limite quand x tend vers $+\infty$:
$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, donc, puisque $-2 < 0$, on a $\lim_{x\to 2} -2x^3 = -\infty$.
Limite quand x tend vers $-\infty$:
$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, donc, puisque $-2 < 0$, on a $\lim_{x\to 2} -2x^3 = +\infty$.

b. $\lim_{x\to\alpha} 3\sqrt{x}$, pour $\alpha = +\infty$ et 4.

Limite quand x tend vers $+\infty$:
$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}$, donc $\lim_{x\to+\infty} 3\sqrt{x} = +\infty$.

Limite quand x tend vers 4 :
$\lim_{x\to 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$, donc $\lim_{x\to 4} 3\sqrt{x} = 3.2 = 6$.

—

(2). *a.* $\lim_{x\to\alpha} x^3 + \frac{1}{x}$, *pour* $\alpha = 2, +\infty$ *et* $-\infty$.

b. $\lim_{x\to\alpha} x^3 + x^2$*, pour* $\alpha = 2, +\infty$ *et* $-\infty$*.*

c. $\lim_{x\to\alpha} 2x^2 - 3x + \sqrt{x}$*, pour* $\alpha = 2$ *et* $+\infty$*.*

Correction :

a. $\lim_{x\to\alpha} x^3 + \frac{1}{x}$, pour $\alpha = 2, +\infty$ et $-\infty$.

Limite quand x tend vers 2 :
$\lim_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$ et $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, donc $\lim_{x\to 2} x^3 + \frac{1}{x} = 8 \times (-\frac{1}{2}) = -4$.

Limite quand x tend vers $+\infty$:
$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc on a $\lim_{x\to+\infty} x^3 + \frac{1}{x} = +\infty$.

Limite quand x tend vers $-\infty$:
$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc on a $\lim_{x\to-\infty} x^3 + \frac{1}{x} = -\infty$.

b. $\lim_{x\to\alpha} x^3 + x^2$, pour $\alpha = 2, +\infty$ et $-\infty$.

Limite quand x tend vers 2 :
$\lim_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$ et $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$, donc $\lim_{x\to 2} x^3 + x^2 = 8 + 4 = 12$.

Limite quand x tend vers $+\infty$:
$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, donc on a $\lim_{x\to+\infty} x^3 + x^2 = +\infty$.

Limite quand x tend vers $-\infty$:
$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^2 = 0$, donc $\lim_{x\to-\infty} x^3 + x^2$ mène à une **Forme Indéterminée '$\infty - \infty$'**.
Pour lever cette forme indéterminée, on factorise l'expression et on utilise les règles de limite d'un produit : $x^3 + x^2 = x^3(1 + \frac{1}{x})$ et puisque $\lim_{x\to-\infty}(1 + \frac{1}{x}) = 1$, on obtient $\lim_{x\to-\infty} x^3 + x^2 = \lim_{x\to-\infty} x^3(1 + \frac{1}{x}) = -\infty$.

c. $\lim_{x\to\alpha} 2x^2 - 3x + \sqrt{x}$, pour $\alpha = 2$ et $+\infty$.

Limite quand x tend vers 2 :
$\lim_{x\to 2} 2x^2 = 2.2^2 = 8$, $\lim_{x\to 2} -3x = -3.2 = -6$ et $\lim_{x\to 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$, donc $\lim_{x\to 2} 2x^2 - 3x + \sqrt{x} = 8 - 6 + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$.

Limite quand x tend vers $+\infty$:
$\lim_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} -3x = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc on a une **Forme Indéterminée '$\infty - \infty$'**.
En factorisant par x^2, on obtient $2x^2 - 3x + \sqrt{x} = x^2\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$. Or $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = 2$, donc on obtient $\lim_{x\to+\infty} 2x^2 - 3x + \sqrt{x} = +\infty$

—

(3). *a.* $\lim_{x\to\alpha} x^3\left(\frac{1}{x} - 1\right)$*, pour* $\alpha = 2, +\infty$ *et* $-\infty$*.*

b. $\lim_{x\to\alpha}(3x+2)(x^2-5)$, *pour* $\alpha = 0, +\infty$ *et* $-\infty$.

c. $\lim_{x\to\alpha}\frac{1}{x}(3-\sqrt{x})$, *pour* $\alpha = 2$ *et* $+\infty$.

Correction :
a. $\lim_{x\to\alpha} x^3\left(\frac{1}{x}-1\right)$, pour $\alpha = 2, +\infty$ et $-\infty$.

Limite quand x tend vers 2 :
$\lim_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$ et $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}-1 = \frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2}$, donc $\lim_{x\to 2} x^3\left(\frac{1}{x}-1\right) = 8+\frac{1}{2} = \frac{17}{2}$.

Limite quand x tend vers $+\infty$:
$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-1 = -1$, donc, puisque $-1 < 0$, on a $\lim_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{1}{x}-1\right) = -\infty$.

Limite quand x tend vers $-\infty$:
$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-1 = -1$, donc, puisque $-1 < 0$, on a $\lim_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{1}{x}-1\right) = +\infty$.

b. $\lim_{x\to\alpha}(3x+2)(x^2-5)$, pour $\alpha = 0, +\infty$ et $-\infty$.

Limite quand x tend vers 0 :
$\lim_{x\to 2} 3x+2 = 2$ et $\lim_{x\to 2} x^2-5 = -5$, donc $\lim_{x\to 2}(3x+2)(x^2-5) = 2.(-5) = -10$.

Limite quand x tend vers $+\infty$:
$\lim_{x\to+\infty} 3x+2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2-5 = -1$, donc on a $\lim_{x\to+\infty}(3x+2)(x^2-5) = +\infty$.

Limite quand x tend vers $-\infty$:
$\lim_{x\to-\infty} 3x+2 = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^2-5 = +\infty$, donc on a $\lim_{x\to-\infty}(3x+2)(x^2-5) = -\infty$.

c. $\lim_{x\to\alpha}\frac{1}{x}(3-\sqrt{x})$, pour $\alpha = 2$ et $+\infty$.

Limite quand x tend vers 2 :
$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x\to 2} 3-\sqrt{x} = 3-\sqrt{2}$, donc $\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}(3-\sqrt{x}) = \frac{3-\sqrt{2}}{2}$.

Limite quand x tend vers $+\infty$:
$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} 3-\sqrt{x} = -\infty 1$, donc on obtient une **Forme Indéterminée '**$0\times\infty$**'**.
En développant, on obtient $\frac{1}{x}(3-\sqrt{x}) = \frac{3}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$. Or $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, donc on obtient $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}(3-\sqrt{x}) = \frac{3}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, par somme de limites.

—

(4). *a.* $\lim_{x\to\alpha}\frac{\left(\frac{1}{x}-2\right)}{2x+1}$, *pour* $\alpha = 2, +\infty$ *et* $-\infty$.

b. $\lim_{x\to\alpha}\frac{2x+1}{\left(\frac{1}{x}-2\right)}$, *pour* $\alpha = +\infty$ *et* $-\infty$.

c. $\lim_{x\to\alpha}\frac{1/x}{2/\sqrt{x}}$, *pour* $\alpha = +\infty$.

d. $\lim_{x\to\alpha} \frac{\frac{1}{x}-2}{\frac{-3}{\sqrt{x}}}$, *pour* $\alpha = +\infty$.

e. $\lim_{x\to\alpha} \frac{2x^2+3x+4}{3x^2+5}$, *pour* $\alpha = 0$ *et* $+\infty$.

Correction :

a. $\lim_{x\to\alpha} \frac{\left(\frac{1}{x}-2\right)}{2x+1}$, pour $\alpha = 2, +\infty$ et $-\infty$.

Limite quand x tend vers 2 :

$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$ et $\lim_{x\to 2} 2x+1 = 5$, donc $\lim_{x\to 2} \frac{\left(\frac{1}{x}-2\right)}{2x+1} = -\frac{3}{2\times 5} - \frac{3}{10}$.

Limite quand x tend vers $+\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 2 = -2$ et $\lim_{x\to+\infty} 2x+1 = +\infty$, donc on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}-2\right)}{2x+1} = 0$.

Limite quand x tend vers $-\infty$:

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} - 2 = -2$ et $\lim_{x\to-\infty} 2x+1 = -\infty$, donc on a $\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}-2\right)}{2x+1} = 0$.

b. $\lim_{x\to\alpha} \frac{2x+1}{\left(\frac{1}{x}-2\right)}$, pour $\alpha = +\infty$ et $-\infty$.

Limite quand x tend vers $+\infty$:

$\lim_{x\to+\infty} 2x+1 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 2 = -2$, donc, puisque $-2 < 0$, on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}-2\right)}{2x+1} = -\infty$.

Limite quand x tend vers $-\infty$:

$\lim_{x\to-\infty} 2x+1 = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} - 2 = -2$, donc, puisque $-2 < 0$, on a $\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}-2\right)}{2x+1} = +\infty$.

c. $\lim_{x\to\alpha} \frac{1/x}{2/\sqrt{x}}$, pour $\alpha = +\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} 1/x = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} 2/\sqrt{x} = 0$, donc on obtient une **Forme Indéterminée '$\frac{0}{0}$'**. On change donc l'expression de la fonction, en simplifiant la fraction :

$$\frac{1/x}{2/\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

On obtient que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{2/\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$.

d. $\lim_{x\to\alpha} \frac{\frac{1}{x}-2}{\frac{-3}{\sqrt{x}}}$, pour $\alpha = +\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} 1/x - 2 = -2$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{\sqrt{x}} = 0$. Mais pour déterminer la limite du quotient, nous devons être plus précis, et indiquer le signe du dénominateur : on a toujours $\sqrt{x} \geq 0$, donc $\frac{-3}{\sqrt{x}} \leq 0$, et tend vers 0 : on note cela $\lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{\sqrt{x}} = 0^-$. Et par les règles de limite de quotient, on obtient : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}-2}{\frac{-3}{\sqrt{x}}} = +\infty$.

e. $\lim_{x\to\alpha} \frac{2x^2+3x+4}{3x^2+5}$, pour $\alpha = 0$ et $+\infty$.
Limite quand x tend vers 0 :

$\lim_{x\to 0} 2x^2+3x+4 = 4$ et $\lim_{x\to 0} 3x^2+5 = 5$, donc $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x^2+3x+4}{3x^2+5} = \frac{4}{5}$.

Limite quand x tend vers $+\infty$:
$\lim_{x\to+\infty} 2x^2+3x+4 = -2$ et $\lim_{x\to+\infty} 3x^2+5 = +\infty$, donc on obtient une **Forme Indéterminée '$\frac{\infty}{\infty}$'**. A nouveau, pour lever l'indéterminée, on change donc l'expression de la fonction ; ici, l'idée est de *factoriser le numérateur et le dénominateur par la plus grand puissance de x* :

$$\frac{2x^2+3x+4}{3x^2+5} = \frac{x^2(2+3/x+4/x^2)}{x^2(3+5/x^2)} = \frac{2+3/x+4/x^2}{3+5/x^2}.$$

Maintenant, on a $\lim_{x\to+\infty} 2+3/x+4/x^2 = 2$ et $\lim_{x\to+\infty} 3+5/x^2 = 3$, don on obtient que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+3x+4}{3x^2+5} = \dfrac{2}{3}$.

—

Exercice n° 3
Déterminer les limites des fonctions suivantes aux valeurs demandées (en distinguant, si besoin, les limites à gauche et à droite.

a. $f(x) = \dfrac{4x}{4-x}$ *en* 0 *et en* 4.

Correction : $\lim_{x\to 0} f(x) = \dfrac{4.0}{4-0} = \dfrac{0}{4} = 0$.
On a $\lim_{\substack{x\to 4\\ x>4}}(4-x) = 0^-$, tandis que $\lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}}(4-x) = 0^+$. Donc $\lim_{\substack{x\to 4\\ x>4}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}} f(x) = +\infty$ (limite de quotient de fonctions).

—

b. $g(x) = 5x - 1 + \dfrac{1}{x-3}$ *en* $+\infty$*, en* 3 *et en* $-\infty$.

Correction : On a $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x-3} = 0$, donc $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$.
D'autre part, $\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$, et $\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$. Donc $\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} g(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} g(x) = -\infty$.

—

c. $h(x) = \left(\sqrt{x} - 1 + \dfrac{1}{x}\right)$ *en* $+\infty$ *et en* 0.

Correction : Commençons par noter que cette fonction a pour ensemble de définition $]0;+\infty[$. On ne cherchera donc à déterminer que la limite à *droite* de 0 (car pour $x < 0$, la fonction n'est pas définie). On a $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$, Donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = +\infty$.
D'autre part, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.

—

d. $k(x) = (4-x^2)(3x-1)$ *en* $+\infty$*, en* 0 *et en* $-\infty$.

Correction : On a d'une part $\lim_{x\to\pm\infty}(4-x^2) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0}(4-x^2) = 4$. D'autre part, $\lim_{x\to\pm\infty}(3x-1) = \pm\infty$ et $\lim_{x\to 0}(3x-1) = -1$. On a donc $\lim_{x\to+\infty} k(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} k(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0} k(x) = -4$ (limite de produit de fonctions).

—

e. $l(x) = \dfrac{3-\sqrt{3}}{x}(3-\sqrt{x})$ *en* 9 *et en* 0.

Correction : $\lim_{x\to 9} l(x) = \dfrac{3-\sqrt{3}}{9}(3-\sqrt{9}) = 0$.
D'autre part on a $3-\sqrt{3} > 0$ et $\lim_{x\to 0}(3-\sqrt{x}) = 3 > 0$, donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} l(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} l(x) = -\infty$.

—

f. $u(x) = \dfrac{4x-3}{(4-x)^2}$ *en* 4.

Correction : On a $\lim_{x\to 4}(4x-3) = 13 > 0$, et $\lim_{x\to 4}(4-x)^2 = 0^+$. Donc $\lim_{x\to 4} u(x) = +\infty$ (limite de quotient de fonctions).

—

g. $v(x) = x^2 - 1/x^2$ *en* $+\infty$, *en* 0 *et en* $-\infty$.

Correction : Puisque $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, on a $\lim_{x\to\pm\infty} v(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$.

Par ailleurs, $\lim_{x\to 0} v(x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{-1}{x^2} = -\infty$.

—

h. $w(x) = \dfrac{1}{x(x-7)}$ *en* $+\infty$, *en* 7 *et en* 0.

Correction : On a $\lim_{x\to+\infty} x(x-7) = +\infty$ (limite d'un produit), donc $\lim_{x\to+\infty} w(x) = 0$.

Puisque $x > 0$ lorsque x tend vers 7, et que $\lim_{\substack{x\to 7\\ x>7}} \dfrac{1}{x-7} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 7\\ x<7}} \dfrac{1}{x-7} = -\infty$, on a $\lim_{\substack{x\to 7\\ x>7}} w(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 7\\ x<7}} w(x) = -\infty$.

En revanche, puisque $x - 7 < 0$ lorsque x tend vers 0, on a $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} w(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} w(x) = +\infty$.

—

Exercice n° 4

Déterminer les limites en $+\infty$ *et en* $-\infty$ *des fonctions suivantes.*

a. $f(x) = 2 - x - x^3$.

Correction : On a $\lim_{x\to\pm\infty} x = \lim_{x\to\pm\infty} x^3 = \pm\infty$. Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

—

b. $g(x) = x^4/2 - x^2/4$.

Correction : On a une F.I. '$\infty - \infty$'. Mais en factorisant : $g(x) = x^4(\frac{1}{2} - \frac{1}{4x^2})$. Puisque $\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4x^2}) = \frac{1}{2}$ (> 0), et que $\lim_{x\to\pm\infty} x^4 = +\infty$, on obtient $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$.

—

c. $h(x) = 10^{-3}x^3 - 10^6 x$.

Correction : On a à nouveau une F.I. '$\infty - \infty$', que l'on contourne, à nouveau, en factorisant : $h(x) = x^3(10^{-3} - 10^6/x^2)$. Puisque $\lim_{x\to\pm\infty}(10^{-3} - 10^6/x^2) = 10^{-3}$ (> 0), et que $\lim_{x\to\pm\infty} x^3 = \pm\infty$, on obtient $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \pm\infty$.

—

d. $k(x) = 3x - x^3/3$.

Correction : Comme précédemment, on factorise : $k(x) = x^3(3/x^2 - 1/3)$. Puisque $\lim_{x\to\pm\infty}(3/x^2 - 1/3) = -1/3$ (< 0), et que $\lim_{x\to\pm\infty} x^3 = \pm\infty$, on obtient $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \mp\infty$.

—

e. $l(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-1}$.

Correction : On a une F.I. '∞/∞'. Mais on a

$$\frac{3x+1}{x^2-1} = \frac{x(3+1/x)}{x(x-1/x)} = \frac{3+1/x}{x-1/x}.$$

Puisque $\lim_{x\to\pm\infty} 1/x = 0$, on en déduit que $\lim_{x\to\pm\infty} l(x) = 0$.

—

f. $u(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$.

Correction : On a

$$\frac{3x+1}{x-1} = \frac{x(3+1/x)}{x(1-1/x)} = \frac{3+1/x}{1-1/x}.$$

Puisque $\lim_{x\to\pm\infty} 1/x = 0$, on en déduit que $\lim_{x\to\pm\infty} u(x) = 3$.

—

g. $v(x) = \dfrac{-x^3 + 10x^2 + 1}{x^2 + 5}$.

Correction : On a

$$\frac{-x^3 + 10x^2 + 1}{x^2 + 5} = \frac{x^2(-x + 10 + 1/x^2)}{x^2(1 + 5/x^2)} = \frac{-x + 10 + 1/x^2}{1 + 5/x^2}.$$

Puisque $\lim_{x\to\pm\infty} 1/x^2 = 0$, on en déduit que $\lim_{x\to\pm\infty} v(x) = \lim_{x\to\pm\infty} -x + 10 = \mp\infty$.

—

h. $w(x) = \dfrac{2x^2 + 5678}{(x-3)^2}$.

Correction : La méthode est toujours la même. On a

$$\frac{2x^2 + 5678}{(x-3)^2} = \frac{2x^2 + 5678}{x^2 - 6x + 9} = \frac{2 + 5678/x^2}{1 - 6/x + 9/x^2}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to\pm\infty} w(x) = 2$.

—

Exercice n° 5

Soit f la fonction définie sur $D_f =]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{6x - 25}{2x - 8}$.

a. *Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in D_f$, on a $f(x) = a + \dfrac{b}{2x - 8}$.*

Correction : On a $6x - 25 = 3(2x - 8) - 1$. Donc $f(x) = \dfrac{3(2x-8) - 1}{2x - 8} = 3 + \dfrac{-1}{2x - 8}$.

—

b. *Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.*

Correction : Puisque $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2x-8} = 0$, on déduit de la question précédente que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 3$. D'autre part on a $\lim_{\substack{x\to4\\x>4}} \frac{1}{2x-8} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to4\\x<4}} \frac{1}{2x-8} = -\infty$, ce qui nous donne que $\lim_{\substack{x\to4\\x>4}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x\to4\\x<4}} f(x) = +\infty$.

—

c. *En déduire les équations des éventuelles asymptotes à la courbe représentative de f.*

Correction : On déduit de la question précédente que la droite d'équation $x = 4$ est une asymptote verticale, et que la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale.

—

Exercice n° 6

Soit f la fonction définie sur $D_f =]-\infty; 1/3[\cup]1/3; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 6}{3x - 1}$.

a. *Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.*

Correction : On a $f(x) = \dfrac{x^2 - 6}{3x - 1} = \dfrac{x - 6/x}{3 - 1/x}$. Donc $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Par ailleurs, $\lim_{x\to1/3} x^2 - 6 = -35/9 < 0$, et $\lim_{\substack{x\to1/3\\x>1/3}} \frac{1}{3x-1} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to1/3\\x<1/3}} \frac{1}{3x-1} = -\infty$, donc on obtient que $\lim_{\substack{x\to1/3\\x>1/3}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x\to1/3\\x<1/3}} f(x) = +\infty$.

—

b. *En déduire les équations des éventuelles asymptotes à la courbe représentative de f.*

Correction : On déduit de la question précédente que la droite d'équation $x = 1/3$ est une asymptote verticale.

—

Exercice n° 7
Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{2x^3 - 1}{5x^2 + x - 9} \quad ; \quad g(x) = \frac{4x^4 - 2x^3 + 6}{2x^4 + 2x^2 + 3} \quad ; \quad h(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \quad ; \quad i(x) = (2x+1)^3 - 10x^2.$$

Correction : Les deux premières limites se calculent par factorisation et simplification :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - 1}{5x^2 + x - 9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x - 1/x^2}{5 + 1/x - 9/x^2} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^4 - 2x^3 + 6}{2x^4 + 2x^2 + 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4 - 2/x + 6/x^4}{2 + 2/x^2 + 3/x^4} = 2.$$

Pour la limite suivante, il faut multiplier par 'la quantité conjuguée' et utiliser au numérateur l'identité remarquable $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x + 1 - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

On a donc $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0.$

En développant l'expression de $i(x)$, on obtient

$i(x) = (2x+1)^3 - 10x^2 = (4x^2+4x+1)(2x+1) - 10x^2 = (8x^3+12x^2+6x+1) - 10x^2 = 8x^3+2x^2+6x+1.$

On a donc $\lim_{x\to+\infty} (2x + 1)^3 - 10x^2 = +\infty.$

—

Exercice n° 8
Soit f la fonction définie sur $[5; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-5}}{x}$.

a. *Démontrer que pour tout $x \geq 5$, on a $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.*

Correction : Il y a deux inégalités à démontrer. Premièrement, la fonction racine carrée prend des valeurs positives, donc pour tout $x \geq 5$, on a bien $\dfrac{\sqrt{x-5}}{x} \geq 0$. Deuxièmement, la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, donc pour tout $x \geq 5$, on a $\sqrt{x-5} \leq \sqrt{x}$, ce qui implique que $\dfrac{\sqrt{x-5}}{x} \leq \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ ($x \in [5; +\infty[$ est positif). Donc $f(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

—

b. *En déduire la limite de f en $+\infty$.*

Correction : On sait que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, on a que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

—

Exercice n° 9
Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\dfrac{1}{x}\right)^3$;

Correction : On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2-\dfrac{1}{x}\right)^3 = 2^3 = 8$.

—

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x$;

Correction : En ‘multipliant par la quantité conjuguée’, on a

$$\sqrt{x^2+x+1}-x = \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}.$$

On simplifie ensuite cette dernière expression :

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2(1+1/x+1/x^2)}+x} = \frac{x(1+1/x)}{x(\sqrt{1+1/x+1/x^2}+1)} = \frac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x+1/x^2}+1}.$$

Finalement, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x+1/x^2}+1} = \frac{1}{2}$.

Note : Dans le dernier calcul ci-dessus, on peut écrire que $\sqrt{x^2(1+...)} = x\sqrt{1+...}$ car on sait que x est positif (on regarde la limite en $+\infty$).

—

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+\sqrt{x^4+5}} - x$;

Correction : On suit la même démarche que dans la question précédente (mais les calculs sont cette fois encore plus compliqués...). On commence par ‘multiplier par la quantité conjuguée’ :

$$\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+5}}-x = \frac{(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+5}}-x)(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+5}}+x)}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+5}}+x} = \frac{x^2+\sqrt{x^4+5}-x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+5}}+x}$$

D’où $\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+5}}-x = \frac{\sqrt{x^4+5}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+5}+x}}$. Puis on simplifie : $\sqrt{x^4+5} = x^2\sqrt{1+5/x^4}$, donc

$$\frac{\sqrt{x^4+5}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+5}}+x} = \frac{x^2\sqrt{1+5/x^4}}{\sqrt{x^2(1+\sqrt{1+5/x^4}}+x} = \frac{x^2\sqrt{1+5/x^4}}{x\sqrt{1+\sqrt{1+5/x^4}}+x} = \frac{x\sqrt{1+5/x^4}}{\sqrt{1+\sqrt{1+5/x^4}}+1}.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+\sqrt{1+5/x^4}}+1 = 2(>0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{1+5/x^4} = +\infty$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+\sqrt{x^4+5}} - x = +\infty$.

—

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\cos x - 1}{x}$.

Correction : Pour tout x, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$. Donc on a $-2 \leq \cos x - 1 \leq 0$, et finalement :

$$-\frac{2}{x} \leq \frac{\cos x - 1}{x} \leq 0.$$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$, donc d’après le théorème des gendarmes, on a que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$.

—

e. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos^2 x - 1}{x^2}$.

Correction : Pour tout x réel, $-1 \leq \cos^2 x - 1 \leq 0$, donc, pour tout $x > 0$:

$$-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} \leq 0$$

Or $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$, donc le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\cos^2 x - 1}{x^2} = 0$.

—

Exercice n° 10
Etudier la limite en 0 *de la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par* $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

Correction : D'après la définition de la fonction valeur absolue :

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \dfrac{x}{x} = 1, & \text{si } x > 0, \\ \dfrac{-x}{x} = -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Autrement dit, la limite à gauche (resp. à droite) de f en 0 est celle de la fonction constante égale à -1 (resp. à 1) : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 1$. En particulier, la fonction f n'a pas de limite en 0.

—

Exercice n° 11
Etudier la limite en $+\infty$ *de la fonction* $f(x) = \dfrac{E(x)}{x}$.

Correction : On rapelle que pour tout x, on a $E(x) \leq x \leq E(x) + 1$. Or la seconde inégalité est équivalente à $x - 1 \leq E(x)$. On en déduit que $x - 1 \leq E(x) \leq x$, soit :

$$\frac{x-1}{x} \leq \frac{E(x)}{x} \leq 1.$$

Note : Puisqu'on étudie la limite quand x tend vers $+\infty$, on a en particulier que x est positif : on a donc pu diviser par x dans l'inequation ci-dessus sans changer le sens des inégalités).
On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - 1/x}{1} = 1$, donc d'après le théorème des gendarmes, on a que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

—

Exercice n° 12
On considère la fonction fraction rationnelle

$$Q(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}.$$

a. *Montrer que* $\frac{Q(x)}{x}$ *tend vers 1 quand* x *tend vers* $\pm\infty$.
Correction : On a

$$\frac{Q(x)}{x} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)x} = \frac{x^2(1 + 2/x - 3/x^2)}{x^2(1 + 1/x)} = \frac{1 + 2/x - 3/x^2}{1 + 1/x}.$$

Donc

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{Q(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 + 2/x - 3/x^2}{1 + 1/x} = 1.$$

—

b. *Calculer $Q(x) - x$ et chercher sa limite (si elle existe) quand $x \to \pm\infty$.*
Correction : On a

$$Q(x) - x = \frac{x^2 + 2x - 3}{x+1} - \frac{x(x+1)}{x+1} = \frac{x^2 + 2x - 3 - x^2 - x}{x+1} = \frac{x-3}{x+1}.$$

Donc

$$\lim_{x\to\pm\infty} Q(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-3}{x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-3/x}{1+1/x} = 1.$$

—

c. *En déduire que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote au graphe de Q.*
Correction : Puisque $\lim_{x\to\pm\infty} Q(x) - x = 1$, on a que $\lim_{x\to\pm\infty} (Q(x) - x) - 1 = \lim_{x\to\pm\infty} Q(x) - (x+1) = 0$. Autrement dit, la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote au graphe de Q.

—

d. *Calculer $Q(x) - (x + 1)$ et étudier son signe.*
Correction : On a

$$Q(x) - (x+1) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x+1} - \frac{(x+1)^2}{x+1} = \frac{-4}{x+1}.$$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ $+\infty$
signe de $x + 1$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
signe de $Q(x) - (x + 1)$	$+$ $\quad$ $\emptyset$ $\quad$ $-$

En particulier, on déduit de ce tableau que la courbe représentative de Q est au dessus (resp. en dessous) de l'asymptote $y = x + 1$ lorsque x tend vers $-\infty$ (resp. vers $+\infty$).

—

Exercice n° 13

Déduire de chacune des limites suivantes (lorsque c'est possible), l'équation d'une asymptote verticale ou horizontale à la courbe représentative de la fonction f.

a. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
Correction : On ne peut rien déduire.

—

b. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
Correction : La courbe représentative admet la droite $y = 2$ pour asymptote horizontale.

—

c. $\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$.
Correction : La courbe représentative admet la droite $x = 3$ pour asymptote verticale.

—

d. $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$.
Correction : On ne peut rien déduire.

—

e. $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$.
Correction : La courbe représentative admet la droite $x = -1$ pour asymptote verticale.

—

Exercice n° 14
Soit la fonction $f(x) = 1 - x - \frac{1}{x}$, de domaine de définition $\mathbb{R}^*$. Déterminer l'équation d'une asymptote oblique à la courbe représentative C_f de f, ainsi que sa position par rapport à C_f.

Correction : On a $f(x) - (1-x) = 1 - x - \frac{1}{x} - (1-x) = -\frac{1}{x}$. Donc $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (1-x) = 0$. La droite d'équation $y = 1 - x$ est donc une asymptote oblique à C_f.

Pour déterminer la position de la courbe représentative C_f par rapport à son asymptote, on étudie le signe de $f(x) - (1-x) = -\frac{1}{x}$, qui dépend de x :
- Si $x > 0$, alors $f(x) - (1-x) < 0$, donc la courbe est en dessous de l'asymptote lorsque x tend vers $+\infty$.
- Si $x < 0$, alors $f(x) - (1-x) > 0$, donc la courbe est au dessus de l'asymptote lorsque x tend vers $-\infty$.

—

Exercice n° 15
Donner deux fonctions f et g satisfaisant les conditions suivantes.

a. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$.
Correction : Une solution est de prendre la même fonction pour f et g, par exemple $f(x) = g(x) = x$.

—

b. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = -\infty$.
Correction : Une possibilité est de prendre deux fonctions 'puissance de x', du type $f(x) = x^m$ et $g(x) = x^n$ avec $m < n$.
Par exemple, prenons $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. Alors $f(x) - g(x) = x - x^2 = x^2(1/x - 1)$, donc $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$.

—

c. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ *et* $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 1$.
Correction : On peut par exemple prendre $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x$, on encore $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 - 1$...

—

d. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ *et* $\lim_{x \to +\infty} (f.g)(x) = 0$.
Correction : On a par exemple $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, et $\lim_{x \to +\infty} x^2 . \frac{1}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

—

e. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ *et* $\lim_{x \to +\infty} (f.g)(x) = +\infty$.
Correction : On a par exemple $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, et $\lim_{x \to +\infty} x^2 . \frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$.

—

f. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0\ \textit{et}\ \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = 0.$

Correction : On a par exemple $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, et $\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

—

g. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0\ \textit{et}\ \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = 1.$

Correction : Une solution est de prendre la même fonction pour f et g, par exemple $f(x) = g(x) = 1/x$.

—